

№1. Дайте определение точечного электрического заряда.

Точечный заряд – заряд, размерами носителя которого по сравнению с расстоянием, на котором рассматривается электростатическое взаимодействие, можно пренебречь

№2. Фундаментальные свойства эл. заряда:

- 1) Существуют 2 вида зарядов, положительные (протоны) и отрицательные (электроны). Их заряды равны по абсолютной величине и составляют элементарный заряд $1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл
- 2) **Инвариантность** электрического заряда - его величина. Не зависит от выбора СО и скорости движения (релятивистская инвариантность)
- 3) **Дискретность заряда** - заряд любого тела составляет целое кратное количество от элементарного заряда (иначе это свойство называется «квантуемость»)
- 4) **Аддитивность** - электрический заряд системы представляет собой алгебраическую сумму зарядов тел, входящих в систему
- 5) **Закон сохранения электрического заряда**: суммарный заряд, находящийся на изолированной системе тел, остается неизменным. В интегральной форме: $\frac{dQ}{dt} + \oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0$, где $\vec{j}$ - плотность тока (Изменение заряда в объеме равно полному току через поверхность). В дифференциальной форме (уравнение непрерывности): $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$, где ρ - объемная плотность заряда

№3. Сформулируйте Закон Кулона.

Два неподвижных точечных заряда в вакууме действуют друг на друга с силами, которые пропорциональны произведению модулей этих зарядов, обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними и направлены вдоль прямой, соединяющей эти заряды:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} * \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

где $\vec{F}$ — сила, с которой заряд 1 действует на заряд 2; q — величина зарядов; $\vec{r}$ — радиус-вектор (вектор, направленный от заряда 1 к заряду 2, и равный, по модулю, расстоянию между зарядами — r); $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ — коэффициент пропорциональности.

№4. Дайте определение напряженности электрического поля.

Векторная величина, равная отношению силы, действующей на неподвижный точечный пробный заряд, к величине этого заряда $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$

Напряженность поля точечного заряда: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

№5. Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей.

Напряжённость электрического поля, создаваемого в любой точке пространства системой зарядов, равна векторной сумме напряжённостей полей, создаваемых различными зарядами по отдельности (в отсутствии всех остальных).

№6. Дайте определение потока напряженности электрического поля.

$$\Phi_E \equiv \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Словами – количество силовых линий, пронизывающих контур. При этом учитывается направление — силовые линии, пронизывающие поверхность в обратном направлении считаются со знаком минус (За положительное направление принимается направление нормали к поверхности)

№7. Сформулируйте электростатическую теорему Гаусса. (! В вакууме)

Теорема Гаусса. В электростатическом поле поток вектора

индукции через любую замкнутую поверхность равен сумме свободных

зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} * \sum_i q_i \text{ - в интегральной форме}$$

$$\text{В дифференциальной форме: } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

Вывод (если надо):

$$\oint_{S_0} \sum_{i=1}^N \vec{E}_i d\vec{S} = \oint_{S_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \vec{r}_i d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \oint_{S_0} \frac{\vec{r}_i d\vec{S}}{r_i^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \oint_{S_0} d\Omega_i = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

№8. Напряженности электростатических полей равномерно заряженных сферы и бесконечной плоскости.

Сфера:

а) $r < R$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E * 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = 0 \Rightarrow E = 0$$

б) $r \geq R$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E * 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2(\epsilon)}$$

Бесконечная плоскость с поверхностной плотностью заряда σ :

Вырежем кусок плоскости цилиндром с площадью основания S . В силу вращательной симметрии все вектора напряженности перпендикулярны плоскости $\Rightarrow$ поток через боковую поверхность цилиндра = 0.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 2E * S = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0(\epsilon)}$$

№ 9. Граничные условия для нормальной и тангенциальной составляющих напряженности эл. поля

1) $\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n} = \sigma$ - для нормальных составляющих электрической индукции, σ – поверхностная плотность заряда; $D = \epsilon \epsilon_0 E$

$\mathbf{E}_{2\tau} - \mathbf{E}_{1\tau} = 0$ - для тангенциальных (касательных) составляющих напряжённости электрического поля

2) Если первый диэлектрик заменить проводником $\Rightarrow E_1 = 0 \Rightarrow D_{1n} = 0 \Rightarrow$

$$\mathbf{D}_n = \sigma$$

$$\mathbf{E}_\tau = 0$$

№10. Как связана с зарядами дивергенция вектора напряженности электрического поля?

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ (теорема Гаусса в дифференциальной форме)}$$

Вывод:

$$\operatorname{div} \vec{E} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} d\vec{S}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{Q}{\epsilon_0 V} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

№11. Запишите формулы для напряженности электрического поля дискретного и непрерывного распределений заряда.

По принципу суперпозиции для напряженности поля совокупности дискретных источников имеем:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$

где каждое

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{(\Delta\vec{r}_i)^2} \frac{\Delta\vec{r}_i}{|\Delta\vec{r}_i|},$$
$$\Delta\vec{r}_i = \vec{r} - \vec{r}_i.$$

Подставив, получаем:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{(\Delta\vec{r}_i)^2} \frac{\Delta\vec{r}_i}{|\Delta\vec{r}_i|},$$
$$\Delta\vec{r}_i = \vec{r} - \vec{r}_i.$$

Для непрерывного распределения аналогично:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}') dV}{(\vec{r} - \vec{r}')^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

где V - область пространства, где расположены заряды (ненулевая плотность заряда), или всё пространство, $\vec{r}$ - радиус-вектор точки, для которой считаем $\vec{E}$, $\vec{r}'$ - радиус-вектор источника, пробегающий все точки области V при интегрировании, dV - элемент объема. Можно подставить x, y, z вместо $\vec{r}$, $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ вместо $\vec{r}'$, $dxdydz$ вместо dV .

№12. Как определяется потенциал электрического поля.

Потенциалом электрического поля в точке M называют работу, которую совершает поле при перемещении единичного положительного заряда из этой точки в точку O , где договорились считать потенциал равным нулю:

$$\varphi = \int_M^O \vec{E} d\vec{r}$$

В силу потенциальности электростатического поля, значение этого интеграла не зависит от выбора траектории интегрирования. Выбор точки O произволен и диктуется соображениями удобства. Обычно за нуль принимают потенциал бесконечно удаленной точки.

№13. Запишите формулы для потенциала электрического поля дискретного и непрерывного распределений заряда

Из принципе суперпозиции следует, что свойство потенциальности справедливо для электрического поля любой системы или конфигурации неподвижных зарядов. Тогда потенциал системы зарядов определяется:

Дискретное распределение зарядов

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \text{ (по принципу суперпозиции)}$$

$$\varphi = \int_M^O \vec{E} d\vec{r} = \sum_i \int_M^O \vec{E}_i d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Непрерывное распределение зарядов

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

а) Если имеется объемная плотность заряда , то потенциал равен интегралу по объему, где имеются заряды

б) Если имеется поверхностная плотность заряда , то потенциал выражается через интеграл по поверхности

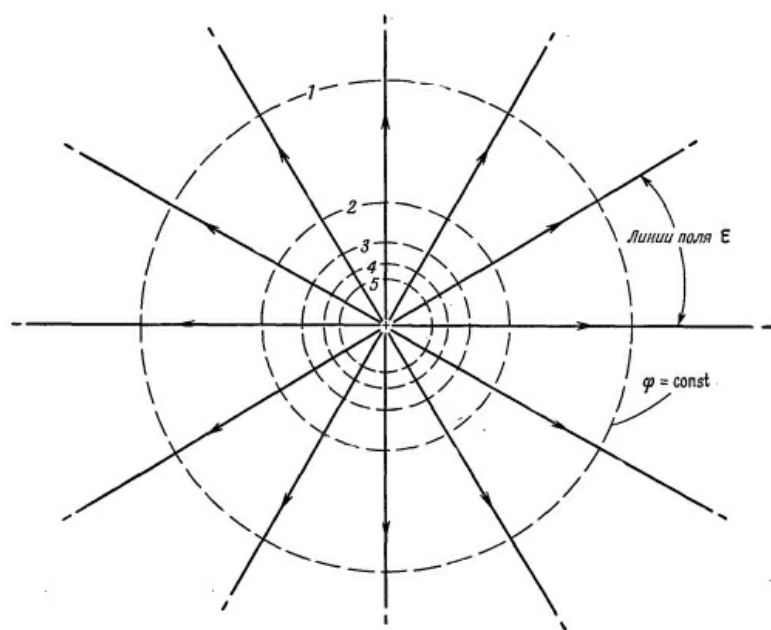
№14. Запишите формулу, показывающую локальную связь между потенциалом и напряженностью электрического поля.

$$E = -grad(\varphi)$$

№15. Приведите примеры эквипотенциальных поверхностей.

Точки пространства, в которых потенциал принимает одно и то же значение, образуют некоторую поверхность. Такие поверхности называются эквипотенциальными.

Например, в случае точечного заряда эквипотенциальными поверхностями являются поверхности концентрических сфер с центром в точке расположения заряда.



Для однородного поля такого как, например поле между обкладками электрического конденсатора поверхности равного потенциала будут иметь форму плоскостей. Эти плоскости расположены параллельно друг другу на одинаковом расстоянии. Правда на краях обкладок картина поля исказится вследствие краевого эффекта. Но мы представим себе, что обкладки бесконечно длинные.



№16. Что такое электрический диполь. Чему равны потенциал и напряженность поля электрического диполя.

Электрический диполь – совокупность двух равных по величине разноименных точечных зарядов, расположенных на расстоянии друг от друга, малом по сравнению с расстоянием до рассматриваемой точки поля.

Потенциал:

$$\varphi(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right), \text{ где } r_{\pm} = \sqrt{r^2 \mp 2(\vec{r}, \vec{l}/2) + \frac{l^2}{4}}, \text{ т.к. } r \gg l \Rightarrow r_{\pm} \approx r \mp \frac{(\vec{r}, \vec{l})}{2r}$$

$$\varphi(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}, \vec{l})}{r^3} = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \text{ где } \vec{p} = q\vec{l} - \text{дипольный момент}$$

Напряженность:

$$E = -grad(\varphi) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r^3} grad(\vec{p}, \vec{r}) - 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r})\vec{r}}{r^4} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p}}{r^3} - 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r})\vec{r}}{r^4} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p}, \vec{n})\vec{n} - \vec{p}}{r^3},$$

$$\text{где } \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

№17. Электрический дипольный момент нейтральной системы зарядов

- 1) Эл. дипольный момент – вектор $\vec{p} = q * \vec{l}$, где $\vec{l}$ – вектор, проведённый от отрицательного заряда к положительному, q – абсолютная величина зарядов
- 2) Эл. дипольный момент нейтральной системы точечных зарядов – вектор $\vec{P} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i$, где N – число зарядов системы, q_i – их заряды, $\vec{r}_i$ – их радиус векторы

- для эл. нейтр. системы величина этой суммы не зависит от выбора начала координат

№18. Чему равна циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Приведите доказательство для системы точечных зарядов.

Циркуляцией вектора напряженности называется работа, которую совершают электрические силы при перемещении единичного положительного заряда по замкнутому пути L :

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l}$$

Так как работа сил электростатического поля по замкнутому контуру равна нулю (работа сил потенциального поля), следовательно циркуляция напряженности электростатического поля по замкнутому контуру равна нулю.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Доказательство для системы точечных зарядов:

Если в электростатическом поле точечного заряда q из точки 1 в точку 2 вдоль произвольной траектории перемещается другой точечный заряд q_0 , то сила, приложенная к заряду, совершает работу. Работа силы $\vec{F}$ на элементарном перемещении $d\vec{l}$ равна:

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = F dl \cos(\alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} dl \cos(\alpha)$$

Т. к. $dr = dl \cos(\alpha)$, то

$$dA = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

Работа при перемещении заряда из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

не зависит от траектории перемещения, а определяется только положениями начальной 1 и конечной 2 точек.

Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является потенциальным, а электростатические силы — консервативными.

№19. Чему равен ротор вектора напряженности электростатического поля. Приведите доказательство для системы точечных зарядов.

Теорема Стокса:

Циркуляция вектора $\vec{E}$ по произвольному контуру Γ равна потоку вектора $rot \vec{E}$ через произвольную поверхность S , ограниченную данным контуром

$$\oint_{\Gamma} E dl = 0 = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} dS \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

№20. Запишите уравнения Пуассона и Лапласа для потенциала электростатического поля.

Векторы индукции и напряжённости электрического поля связаны следующим соотношением:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

где ε – диэлектрическая проницаемость вещества.

Свойство потенциальности поля позволяет ввести потенциал :

$$\vec{E} = - \operatorname{grad}(\varphi) = \frac{\vec{D}}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

Используя дифференциальную форму теоремы Гаусса

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

где ρ – объёмная плотность свободного заряда, получим:

$$\Delta \varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\varphi)) = - \frac{\operatorname{div} \vec{D}}{\varepsilon \varepsilon_0} = - \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}, \text{ где } \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа}$$

$$\text{Уравнение Пуассона (если есть свободные заряды): } \Delta \varphi = - \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

$$\text{Уравнение Лапласа (нет свободных зарядов): } \Delta \varphi = 0$$

№21. Чему равны напряженность и потенциал электрического поля, а также плотность свободных зарядов внутри однородного проводника. Приведите доказательства утверждений.

$$\vec{E} = 0$$

Обоснование:

Если в какой-либо точке внутри проводника напряженность электрического поля отлична от нуля, то под действием этого поля в проводнике возникает движение свободных зарядов - ток. Ток течёт до тех пор, пока поле зарядов, перераспредевшихся по объёму проводника не компенсирует внешнего поля, то есть поле внутри проводника станет = 0.

$$\vec{E} = - \operatorname{grad}(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const}$$

$$Q = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = 0 \quad (\vec{E} = 0), \text{ следовательно зарядов внутри проводника нет. Они расположены на его поверхности.}$$

№22. Какова связь напряженности электрического поля у поверхности однородного проводника с поверхностной плотностью свободных зарядов.

Напряжённость у поверхности проводника определяется поверхностной плотностью зарядов

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon \varepsilon_0}, \text{ т.к. } \vec{E} \text{ перпендикулярно поверхности, } \oint \vec{E} d\vec{S} = E \Delta S$$

$$E \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon \varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

№23. Плоский конденсатор и его ёмкость.

Два проводящих тела, удаленные от других тел и расположенные настолько близко друг к другу, что все линии поля, начинающиеся на одном из них, заканчиваются на другом, образуют идеальный конденсатор. Тела, образующие конденсатор называют его обкладками. Суммарный заряд обеих обкладок равен Q а внешнее поле пренебрежимо мало.

$$\text{Разность потенциалов обкладок пропорциональна заряду на каждой из них: } U = \frac{Q}{C}$$

Коэффициент ϵ - емкость конденсатора (определяется формой и расположением проводников, составляющих конденсатор, и свойствами среды между ними)

Плоский конденсатор - конденсатор, состоящий из 2-х одинаковых плоских пластин, площадью S , разделенных диэлектриком. Расстояние между пластинами $d \ll$ линейного размера пластин.

$$U = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} d = \frac{Q}{S \epsilon \epsilon_0} d \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}$$

№24. Как рассчитать емкость батареи конденсаторов

1) Паралл. соединение конденсаторов: $C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N$

(док-во: $U = U_1 = U_2 = U_3$; $q_i = C_i U$; $q = q_1 + q_2 + q_3$; $q = CU = U(C_1 + C_2 + C_3) \Rightarrow C = C_1 + C_2 + C_3$)

2) Послед. соединение проводников: $1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 + \dots + 1/C_N$

(док-во: $U = U_1 + U_2 + U_3$; $q = q_1 = q_2 = q_3$; $U_i = q/C_i$; $U = q/C = q/C_1 + q/C_2 + q/C_3 \Rightarrow 1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3$)

№25. Дайте определение вектора электрической поляризации.

Вектор поляризации – количественная характеристика поляризации диэлектрика, он равен дипольному моменту единицы объема диэлектрика, возникающему при его поляризации.

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{P}_i}{\Delta V}$$

№26. Что такое электрическая индукция поля.

В не очень сильных электрических полях для большинства материальных сред вектор поляризации пропорционален напряженности поля $\vec{E}$ (такие среды называют линейными)

$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$, где χ - диэлектрическая восприимчивость диэлектрика

В теории электричества вводят вектор индукции электрического поля:

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$, где $\epsilon = 1 + \chi$ - диэлектрическая проницаемость вещества

№27. Сформулируйте теорему Гаусса для электрической индукции в интегральной и дифференциальной формах.

В электростатическом поле поток вектора индукции через любую замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, заключённых внутри этой поверхности:

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = Q$$

или в дифференциальной форме:

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

где ρ – объёмная плотность заряда.

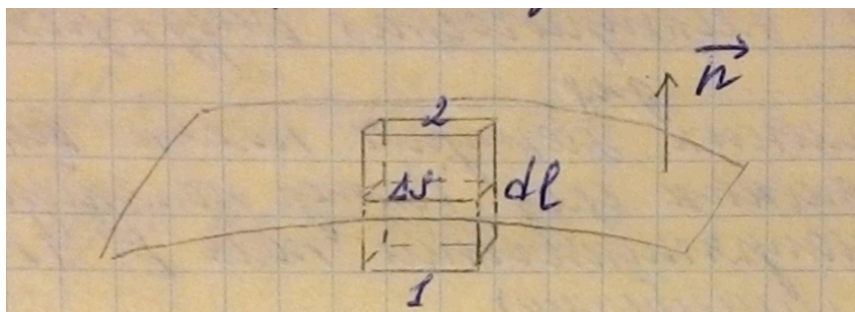
№28. Запишите граничные условия для вектора индукции электрического поля. Откуда они следуют?

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma$$

$$D_{\tau1} = D_{\tau2}$$

Доказательство:

Рассмотрим произвольную заряженную поверхность S , произвольно выберем направление внешней нормали



Выделим около рассматриваемой точки заряженной поверхности прямую призму с образующими dl , перпендикулярными поверхности. Пусть она вырезает из поверхности элемент ΔS столь малый, что его можно считать плоским и равномерно заряженным.

По т. Гаусса
$$\oint \vec{D} d\vec{S} = \sigma \Delta S$$

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = \Delta S \vec{D} = \Delta S(D_{n_2} - D_{n_1}) + N,$$
 где D_{n_2}, D_{n_1} - проекции векторов $\vec{D}$ у соответствующих оснований призмы на нормаль $\vec{n}$, N - поток вектора $\vec{E}$ через боковую поверхность

$$\Delta S(D_{n_2} - D_{n_1}) + N = \sigma \Delta S$$

Будем устремлять высоту призмы к 0, тогда $N \rightarrow 0, D_{n_2} - D_{n_1} = \sigma$

На границе двух диэлектриков при наличии внешнего поля возникают связанные заряды. Дополнительное поле, создаваемое ими перпендикулярно поверхности (иначе бы по ней протекал ток) $\Rightarrow D_{\tau_1} = D_{\tau_2}$

№29. Материальные уравнения для электрического поля, диэлектрические восприимчивость и проницаемость.

В не очень сильных электрических полях для большинства материальных сред $\vec{p} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$

χ - диэлектрическая восприимчивость

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{p} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0(1 + \chi) \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

ϵ - диэлектрическая проницаемость

Материальное уравнение:
$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

№30. Взаимная энергия системы точечных зарядов, собственная энергия заряда.

Взаимная энергия системы точечных зарядов - работа кулоновских сил по удалению зарядов друг от друга на бесконечность $A = \varphi q$

$$W = \frac{1}{2} \sum_k \sum_i \frac{q_i q_k}{4\pi \epsilon_0 r_{ik}} = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i, \text{ тут } 1/2, \text{ т.к. каждая работа учитывалась дважды для каждой пары зарядов}$$

Собственная энергия заряда — это энергия взаимодействия различных внутренних элементов заряда между собой. *Собственная энергия точечного заряда бесконечна.* Энергия взаимодействия дискретных зарядов — это полная энергия поля за вычетом собственной энергии зарядов. Она положительна, когда их собственная энергия (всегда положительная) меньше полной энергии поля, и отрицательна — когда больше.

№31. Энергия системы непрерывно распределенных зарядов (формула).

Пусть заряды непрерывно распределены в некотором объеме с плотностью $\rho(\vec{r})$ или с плотностью $\sigma(\vec{r})$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r}) dV = \frac{1}{2} \int_S \sigma(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dS$$

№32. Запишите формулы для энергии электростатического поля и ее объемной плотности

1) Объемная плотность энергии эл. поля:

$$\omega = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \rho \varphi = \frac{1}{2} (\vec{E}, \vec{D}) = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2$$

2) Энергия эл. поля:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \varphi_i$$

№33. Чему равны сила и момент сил, действующие на точечный диполь в электрическом поле.

$$F = qE$$

Проекция силы на ось x:

$$F_x = q(E_x(l/2, 0, 0) - E_x(-l/2, 0, 0))$$

$$F_x = q \frac{\partial E_x}{\partial x} l = q(\vec{l}, \vec{\nabla}) E_x = (\vec{p}, \vec{\nabla}) E_x, \quad \vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Аналогично на другие оси

$$\vec{F} = (\vec{p}, \vec{\nabla}) \vec{E}$$

$$\vec{M} = [\vec{l} \times \vec{F}] = [\vec{l} \times q \vec{E}] = [q \vec{l} \times \vec{E}] = [\vec{p} \times \vec{E}]$$

№34. Дайте определения силы электрического тока и плотности тока. Какова связь между ними.

Плотность тока - заряд, проходящий в единицу времени через элемент поверхности единичной площади

$\vec{j} = e(n^+ \vec{v}^+ - n^- \vec{v}^-)$, где n^+ , n^- - концентрации положительных и отрицательных заряженных частиц, $\vec{v}^+$, $\vec{v}^-$ - скорости их упорядоченного движения

Сила тока - заряд, проходящий в единицу времени через полное сечение проводника

$$I = \int \vec{j} d\vec{S} = \frac{dq}{dt}$$

№35. Запишите уравнение непрерывности в интегральной и дифференциальной формах.

Рассмотрим внутри проводника с током какую-либо замкнутую поверхность S , тогда из определения плотности тока следует, что положительный заряд, уходящий в единицу времени через всю поверхность S наружу, есть

$$\oint \vec{j} d\vec{S}$$

Согласно одному из основных законов электричества, электрические заряды сохраняются, поэтому если есть изменение за единицу времени положительного заряда, заключенного

внутри замкнутой поверхности S , то

$$-\frac{dq}{dt} = \oint \vec{j} d\vec{S} \text{ - интегральная форма}$$

Применяя формулу Остроградского-Гаусса получаем

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div} \vec{j} \text{ - дифференциальная форма} \quad (\text{div} \vec{j} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{j} d\vec{S}}{\Delta V})$$

где ρ - объёмная плотность заряда, а интегрирование ведётся по объёму, заключённому поверхностью S .

№36. Условие стационарности тока. Закон Ома для участка цепи и его дифференциальная форма

Условие стационарности тока: поток плотности тока через замкнутую поверхность равен нулю

$$\oint \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = 0$$

Если концентрации носителей заряда не зависят от напряженности поля, то справедлив закон Ома

Закон Ома для участка цепи: сила тока в участке цепи прямо пропорциональна напряжению и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению данного участка цепи

$$I = \frac{U}{R}$$

Дифференциальная форма:

$$IR = U = \int_1^2 E dr \quad R = \frac{l}{\lambda S} \quad I \frac{l}{\lambda S} = \int_1^2 E dr = E \int_1^2 dr = El \Rightarrow \vec{j} = \lambda \vec{E}$$

где $\vec{j}$ – вектор плотности тока, λ - удельная проводимость, $\vec{E}$ - вектор напряженности электрического поля

№37. Сопротивление и удельное сопротивление проводника. Проводимость и удельная проводимость проводника.

Электрическое сопротивление — физическая величина, характеризующая свойства проводника препятствовать прохождению электрического тока и равная отношению напряжения на концах проводника к силе тока, протекающего по нему.

Физический смысл удельного сопротивления в СИ: сопротивление однородного куска проводника длиной 1 м и площадью поперечного сечения 1 м². $R = \frac{\rho l}{S}$

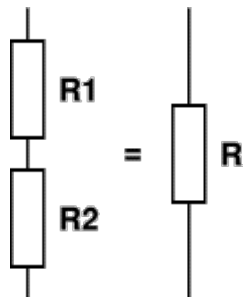
Электрическая проводимость (электропроводность, проводимость) — способность тела проводить электрический ток, а также физическая величина, характеризующая эту способность и обратная электрическому сопротивлению

Удельной проводимостью (удельной электропроводностью) называют меру способности вещества проводить электрический ток. $\lambda = \frac{1}{\rho}$

Согласно закону Ома в линейном изотропном веществе удельная проводимость является коэффициентом пропорциональности между плотностью возникающего тока и величиной электрического поля в среде: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, где $\vec{j}$ – вектор плотности тока, $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля.

№38. Как рассчитать сопротивление батареи проводников?(формулы, рисунки).

Последовательное соединение резисторов



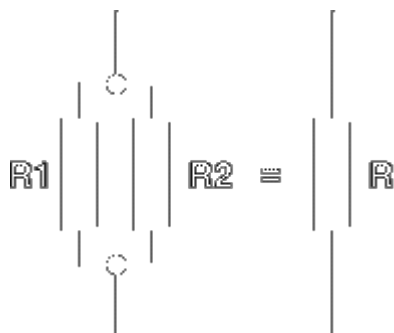
если резисторы R1 и R2 соединены последовательно, их общее сопротивление высчитывается по формуле:

$$R = R1 + R2.$$

Это справедливо и для большего количества соединённых последовательно резисторов:

$$R = R1 + R2 + R3 + R4 + \dots + Rn.$$

Параллельное соединение резисторов



Расчет параллельного сопротивления двух параллельно соединённых резисторов R1 и R2 производится по следующей формуле:

$$1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots$$

№39. Закон Джоуля-Ленца и его дифференциальная форма.

Мощность тепла, выделяемого в единице объема среды при протекании электрического тока, пропорциональна произведению плотности электрического тока на величину напряженности электрического тока. Количество теплоты, выделяемое в единицу времени на рассматриваемом участке цепи, пропорционально произведению квадрата силы тока на этом участке и сопротивлением участка.

$$A = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = Idt \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = IUdt$$

$$W = IUdt$$

$$Q = IU = \frac{U}{R} U = I \cdot IR \Rightarrow Q = IU = \frac{U^2}{R} = I^2 R$$

Дифференциальная форма: $q = \frac{dQ}{dV} = \vec{j} \vec{E} = \lambda E^2$, где $\frac{dQ}{dV}$ - мощность выделения тепла в единицу объема, $\vec{j}$ - плотность электрического тока, $\vec{E}$ - напряженность электрического тока, λ - проводимость среды.

№40. Сформулируйте правила Кирхгофа. Убедите экзаменатора в умении их применять

1-ое правило: алгебраическая сумма всех токов, втекающих в любой узел, равна нулю;

2-ое правило: для любого контура сумма падений напряжения на его элементах равна сумме ЭДС, действующих в этом контуре;

(Узел – точка цепи, где сходятся 3 и более проводов;

Ветвь – участок цепи между двумя узлами;

Контур – замкнутый участок цепи)

Применение правил:

- 1) Если в цепи N узлов, то 1-ое правило позволяет написать N-1 ЛНЗ уравнение $\Rightarrow$ при составлении уравнений один узел (любой) следует исключить;
- 2) При составлении уравнений по 2-му правилу следует выбирать независимые контуры:
 - 1-ый контур выбрать произвольно и пометить одну из ветвей, которая не должна входить в последующие контуры;
 - и т. д., пока в цепи нельзя будет провести более ни одного контура;
- 3) из п.1) и п.2) получим столько уравнений, сколько в цепи неизвестных токов;
- 4) Правило знаков:
 - для каждой ветви выбирается (произвольно) положит. направление тока ветви, которое в процессе решения задачи больше не изменится;
 - при составлении уравнений для узлов токи, которые направлены к этому узлу, брать со знаком +, иначе со знаком -;
 - в уравнениях для контуров – обход всех его участков в одном направлении; при обходе падение напряжения на элементе брать со знаком +, если этот элемент проходится в направлении, совпадающем с ранее выбранным направлением тока в ветви;

- ЭДС источника считается положительным, если источник проходится от минуса к плюсу;

Элементы цепи: (L – коэфф. самоиндукции, $L_{1,2}$ - коэфф. взаимной индукции обмоток)

Резистор: $U_R=IR$; Индуктивность: $U_L=L \, dI/dt$; Конденсатор: $U_C=(1/C)$;

Индуктивно связанные катушки ЭДС: $\xi_{1,2} = L_{1,2} \, dI/dt$

№41. Закон сохранения энергии для цепей постоянного тока, содержащих э.д.с.

Стационарные токи могут протекать только при наличии сторонних сил (не кулоновского происхождения), действующих на заряженные частицы. Их описывают полем сторонних сил ($\vec{E}_c$)

Закон Ома: $\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_c)$

ЭДС (электродвижущая сила) определяется, как: $\varepsilon = \int \vec{E}_c d\vec{l}$

Сторонние силы не потенциальны, поэтому их работа по перемещению заряда по замкнутому контуру отлична от нуля:

$$A = I\varepsilon$$

Работа кулоновских сил по замкнутому контуру $= 0 \Rightarrow Q = I\varepsilon$ - закон сохранения энергии для цепи, содержащей ЭДС

Количество теплоты, выделяемой во всей цепи равно работе сторонних сил.

№42. Запишите закон взаимодействия элементов тока – закон Ампера.

Магнитное поле - поле, создаваемое движущимися зарядами и действующее на другие движущиеся заряды

Силовая характеристика магнитного поля в данной точке пространства - *индукция магнитного поля* $\vec{B}$

$\vec{B}$ - такой вектор, что сила Лоренца, действующая со стороны магнитного поля на заряд q , движущийся со скоростью $\vec{v}$, равна

$$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$$

Закон Ампера:

Совокупная сила, действующая со стороны магнитного поля на элемент проводника $d\vec{l}$

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}]$$

$$\vec{F}_A = I \int_L [d\vec{l} \times \vec{B}]$$

43. Что такое вектор магнитной индукции поля. Запишите закон Био-Савара-Лапласа.

Магнитная индукция – $\vec{B}$ - векторная величина, являющаяся силовой характеристикой магнитного поля (его действия на заряженные частицы) в данной точке пространства. Определяет, с какой силой $\vec{F}$ магнитное поле действует на заряд q , движущийся со скоростью $\vec{v}$. $\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$

Для стационарных токов выполняется закон Био-Савара-Лапласа:

$$\vec{B}(M) = \int_L d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$

$\vec{r}$ - вектор, проведенный из элемента $d\vec{l}$ в точку M , в которой мы ищем вектор магнитной индукции. μ_0 - магнитная постоянная

№44. Чему равны индукция магнитного поля прямого бесконечного провода с током?

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi R}$$

Выводится из закона БСЛ

№45. Теорема о циркуляции магнитной индукции (закон полного тока)

Для макроскопического описания магнитного поля в веществе вводится вектор намагниченности:

$$\vec{J} = \frac{\sum_i \vec{p}_{mi}}{\Delta V}, \text{ где } \vec{p}_{mi} - \text{магнитный момент всех амперовых, оказавшихся внутри бесконечно малого объема } \Delta V$$

Магнитный момент контура $\vec{p}_m = I \int_S d\vec{S}$, $d\vec{S}$ принадлежит произвольной поверхности, натянутой на контур,

направлен по правилу правого винта относительно направления протекания тока.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} - \text{вектор напряженности магнитного поля}$$

Для достаточно слабых полей и большинства встречающихся веществ $\vec{J} = \chi \vec{H}$, χ — магнитная восприимчивость вещества

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H}$$

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = (1 + \chi) \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

Теорема о циркуляции:

В произвольной намагниченной среде циркуляция вектора напряженности магнитного поля равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I - \text{интегральная форма}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{H} d\vec{l}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{I}{\Delta S} = \vec{j} \Rightarrow \text{rot} \vec{H} = \vec{j} - \text{дифференциальная форма}$$

№46. Сформулируйте теорему Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах.

Поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$$

или в дифференциальной форме:

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

№47. Что такое векторный потенциал. Как он связан с магнитной индукцией. Условие нормировки.

Векторный потенциал электромагнитного поля (вектор-потенциал, магнитный потенциал) — в электродинамике, векторный потенциал, ротор которого равен магнитной индукции:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$$

Калибровка векторного потенциала — наложение дополнительных условий, позволяющих однозначно вычислить векторный потенциал электромагнитного поля для решения тех или иных физических задач.

Кулоновская калибровка — выбор векторного потенциала магнитного поля в виде

$$\text{div} \vec{A} = 0$$

Эта калибровка применяется для рассмотрения нерелятивистских магнитостатических задач.

Симметричная калибровка — выбор векторного потенциала магнитного поля в виде $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$, где $\vec{B}$ — вектор магнитного поля, а $\vec{r}$ — радиус-вектор.

№48. Чему равна индукция магнитного поля плоского витка с током.

Пример 7.3. По кольцу радиуса R течет ток I . Найдите индукцию магнитного поля $\vec{B}$ в точке, расположенной на перпендикуляре к плоскости кольца, восстановленном из его центра.

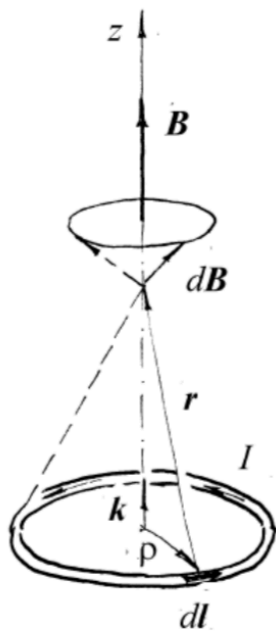


Рис.7.3

Решение. Воспользуемся формулой (7.4). При интегрировании по $d\vec{l}$ учтем, что $r = \sqrt{R^2 + z^2} = \text{const}$ (см. рис. 7.3). Введем вектор $\vec{\rho}$ так, что $\vec{r} = \vec{k}z - \vec{\rho}$ ($\vec{k}$ – орт оси Oz). Подставив $\vec{r}$ в (7.4), получим
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left\{ \oint [d\vec{l}, \vec{k}z] + \oint [\vec{\rho}, d\vec{l}] \right\}.$$
 Поскольку вдоль пути интегрирования $\vec{k}z = \text{const}$, то $\oint [d\vec{l}, \vec{k}z] = \left[\oint d\vec{l}, \vec{k}z \right] = 0$, так как $\oint d\vec{l} = 0$. Кроме того, $\oint [\vec{\rho}, d\vec{l}] = 2\vec{S} = 2\vec{k}S = 2\vec{k}\pi R^2$. Поэтому

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (7.19)$$

$$\vec{B}(M) = \int_L d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \quad (7.4)$$

№49. Чему равны сила и момент сил, действующие на элементарный ток в магнитном поле

Элементарный ток – электрический ток в замкнутом элементарном контуре (малых размеров)

$$\vec{M} = I \oint_L [\vec{r}, [d\vec{l}, \vec{B}]] = [\vec{p}_m, \vec{B}]$$

Контур стремиться занять устойчивое положение, при котором момент сил будет равен нулю. При этом $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$

$$\vec{F} = I \oint [d\vec{l}, \vec{B}] = 0 \text{ - для однородного поля}$$

Для неоднородного: $\vec{F} = \text{div}(\vec{p}_m, \vec{B})$

№50. Сила Лоренца и характер движения заряда в постоянных электрическом и магнитном полях.

Если частица с зарядом q движется со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле $\vec{B}$, то на эту частицу действует сила Лоренца.

$$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$$

Так как сила Лоренца в каждый момент времени перпендикулярна скорости частицы, то она не влияет на модуль скорости, но меняет ее направление. Как следствие частица движется по спирали.

Если частица с зарядом q влетает на скорости (с начальной скоростью) $\vec{v}$

в однородное электрическое поле между пластинами плоского конденсатора, то на нее будет действовать постоянная сила $\vec{F} = q\vec{E}$, направленная вниз или вверх, тогда получаем ситуацию, идентичную полету тела, брошенного под углом к горизонту, соответственно частица будет двигаться по параболе.

№51. Сформулируйте закон электромагнитной индукции Фарадея и правило Ленца.

Явление электромагнитной индукции заключается в том, что изменение магнитного потока, пронизывающего замкнутый проводящий контур, порождает в нем ЭДС индукции

Закон Фарадея

ЭДС электромагнитной индукции в контуре равна скорости изменения магнитного потока через контур, взятой с противоположным знаком

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Дифференциальная формулировка:

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E} d\vec{l} \quad \Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} \quad (\text{т Стокса: } \oint_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = \oint_L \vec{E} d\vec{l}) \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Правило Ленца

Индукционный ток всегда направлен так, что его действие противоположно действию причины, его порождающей.

№52. В чем заключается явление самоиндукции.

Самоиндукция – явление возникновения ЭДС индукции в проводящем контуре, при изменении протекающего через контур тока. При изменении тока в контуре пропорционально меняется магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром. Изменение магнитного потока, согласно закону Фарадея, приводит к появлению ЭДС индукции.

№53. Что характеризует коэффициент самоиндукции (индуктивность)

Коэффициент самоиндукции (индуктивность) замкнутого контура – коэффициент пропорциональности между силой тока I в этом контуре и магнитным потоком Φ через этот контур, создаваемым этим током: $L = \frac{\Phi}{I}$

№54. В чем заключается явление взаимной индукции.

Взаимная индукция - явление возникновения ЭДС индукции в одном контуре, при изменении силы тока во втором и наоборот. Это частный случай электромагнитной индукции.

При изменении силы тока в первом контуре, во втором возникает ЭДС:

$$\varepsilon_2 = - \frac{d\Phi_1}{dt} = - L \frac{dI_1}{dt}$$

Явление взаимной индукции применяется для повышения и понижения напряжения переменного тока в трансформаторах

№55. Запишите формулы для энергии магнитного поля и ее объемной плотности.

H есть напряженность поля внутри катушки полем. Поэтому энергия единицы объема поля, или *объемная плотность энергии* магнитного поля, равна

$$w = \mu\mu_0 H^2 / 2. \quad (97.1)$$

Если магнитное поле неоднородно, то его можно разбить на бесконечно малые элементы объема $d\tau$, в каждом из которых поле можно считать однородным. Энергия, заключенная в элементе объема, есть $w d\tau$. Полная энергия любого магнитного поля равна

$$W = \int_{\tau} w d\tau, \quad (97.2)$$

где интегрирование распространяется на весь объем τ , занятый магнитным полем.

№56. Энергия системы замкнутых контуров с током (формула).

Энергия системы замкнутых контуров равна сумме энергий контуров с учетом их взаимодействия (взаимоиндукция).

Например для двух индуктивно связанных катушек с токами:

$$W_M = \frac{1}{2}(I_1\Phi_1 + I_2\Phi_2) = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2$$

№57. Молекулярные токи и вектор намагничённости.

Тело, помещённое в магнитное поле, намагничивается и создаёт собственное магнитное поле, которое накладывается на внешнее по принципу суперпозиции. Согласно гипотезе Ампера, частицы, из которых состоит тело, можно рассматривать как маленькие контуры, обтекаемые так называемыми молекулярными токами, связанными с орбитальным движением электронов. С такой точки зрения возникновение дополнительного магнитного поля можно объяснить ориентацией этих контуров во внешнем магнитном поле.

Для макроскопического описания магнитного поля в веществе вводится усреднённая по объёму веществ его характеристика – вектор намагничённости

$$\vec{J} = \frac{\sum_i \vec{p}_{mi}}{\Delta V}$$

где $\vec{p}_{mi}$ – магнитный момент всех молекулярных токов, оказавшихся внутри бесконечно малого объёма ΔV .

№58. Дайте определение вектора напряжённости магнитной магнитного поля

Величина вектора $\vec{J}$ зависит от индукции внешнего поля и от свойств рассматриваемого вещества. Эта связь задается материальным уравнением и считается известной из опыта. Для удобства описания магнитного поля в материальных средах вводится вектор напряжённости магнитного поля:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

№59. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля (в интегральной и дифференциальной формах).

Интегральная форма:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} \equiv \sum I$$

Дифференциальная форма:

$\text{rot} \vec{H} \equiv \vec{j}$, где $\vec{j}$ - плотность тока проводимости в рассматриваемой точке пространства

№60. Запишите материальные уравнения для магнитного поля. Что характеризуют магнитные восприимчивость и проницаемость вещества.

$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$ - электрическое поле

$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$, - магнитное поле

$$\vec{j} = \lambda (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}).$$

- закон Ома

Магнитная восприимчивость χ — физическая величина, характеризующая связь между магнитным моментом (намагниченностью) вещества и напряжённостью магнитного поля в этом веществе. (диамагнетики <0 , парамагнетики >0 , ферромагнетики $\gg 1$)

Магнитная проницаемость μ есть коэффициент (зависящий от свойств среды), характеризующий связь между магнитной индукцией и напряжённостью магнитного поля в веществе

$$\mu = 1 + \chi$$

№61. Граничные условия для векторов напряжённости и индукции магнитного поля.

На границе раздела двух сред с различными μ нормальные компоненты вектора $\vec{B}$ непрерывны;

По теореме о циркуляции в отсутствие на границе раздела поверхностных токов проводимости тангенциальные компоненты вектора $\vec{H}$ так же непрерывны.

$$B_{n_1} = B_{n_2} \quad H_{\tau_1} = H_{\tau_2}$$

№62. Что такое ток смещения

Сущность процесса. Постоянный ток не протекает в цепи с конденсатором, а переменный ток протекает. Сила квазистационарного тока проводимости во всех последовательно соединенных элементах цепи является одной и той же. В конденсаторе ток проводимости, связанный с движением электронов, не может существовать, так как обкладки конденсатора разделены диэлектриком. $\Rightarrow$ необходимо заключить, что в конденсаторе происходит некоторый процесс, который как бы замыкает ток проводимости, то есть в некотором смысле обеспечивает обмен зарядом между обкладками конденсатора без переноса заряда между ними. Этот процесс называется **током смещения**.

- плотность тока смещения: $\vec{j} = \frac{d\vec{D}}{dt}$
- ток смещения порождает магнитное поле так же, как его порождает ток проводимости

№63. Запишите уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$1. \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$2. \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$3. \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$4. \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \text{ где } H \text{ и } E - \text{ напряженность магнитного и электрического поля, } D \text{ и } B - \text{ соответственно, электрическая и магнитная индукция, } \vec{j} - \text{ плотность тока проводимости, а } \rho - \text{ объемная плотность свободного заряда}$$

№64. Запишите уравнения Максвелла в интегральной форме.

$$\oint_S \vec{D} dS = Q$$

Поток электрической индукции через замкнутую поверхность пропорционален величине свободного заряда, находящегося в объеме, который окружает поверхность.

$$\oint_S \vec{B} dS = 0$$

Поток магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю (магнитные заряды не существуют).

$$\oint_L \vec{E} dl = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} dS$$

Изменение потока магнитной индукции, проходящего через незамкнутую поверхность S, взятое с обратным знаком, пропорционально циркуляции электрического поля на замкнутом контуре L, который является границей поверхности.

$$\oint_L \vec{H} dl = I + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} dS$$

Полный электрический ток свободных зарядов и изменение потока электрической индукции через незамкнутую поверхность S, пропорциональны циркуляции магнитного поля на замкнутом контуре L, который является границей поверхности.

№65. Сколько решений имеет система уравнений Максвелла. Ответ обоснуйте.

Уравнения Максвелла (4 штуки) образуют не замкнутую систему, поэтому у нее бесконечно много решений. Чтобы система уравнений Максвелла образовывала замкнутую систему, надо дополнить ее материальными уравнениями.

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{j} = \lambda (\vec{E} + \vec{E}_c)$$

№66. Дайте определение и запишите выражение для вектора Умова-Пойнтинга.

Вектор Умова-Пойнтинга характеризует плотность потока энергии электромагнитной волны, т.е. энергию, переносимую волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}] = \omega c \vec{n}$$

$\omega = \varepsilon \varepsilon_0 E^2$ - объемная плотность энергии, $\vec{n}$ - единичный вектор, задающий направление распространения волн, c - скорость распространения электромагнитных волн

№67. Получите волновое уравнение из системы уравнений Максвелла

$$(1) \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$(2) \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$(3) \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$(4) \operatorname{div} \vec{E} = \rho = 0$$

Рассматриваем однородную нейтральную непроводящую систему.

$$\text{Из (2) } \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = - \operatorname{rot} \frac{d\vec{B}}{dt} = - \frac{d}{dt} \operatorname{rot} \vec{B} = - \frac{d}{dt} \mu \mu_0 \frac{d\vec{D}}{dt} = - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = - \Delta \vec{E} \text{ (оператор Лапласа)}$$

$$\Delta \vec{E} = - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = - \frac{1}{v^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}, \text{ где } v - \text{ скорость распространения волны.}$$

№68. Что такое плоская волна.

Электромагнитная волна - распространяющееся в пространстве изменение состояния электромагнитного поля.

Плоская волна - это волна, фронт которой имеет форму плоскости (фронт - это поверхность, до которой дошли колебания к данному моменту времени)

Плоская электромагнитная волна - частный случай общего решения волнового уравнения:

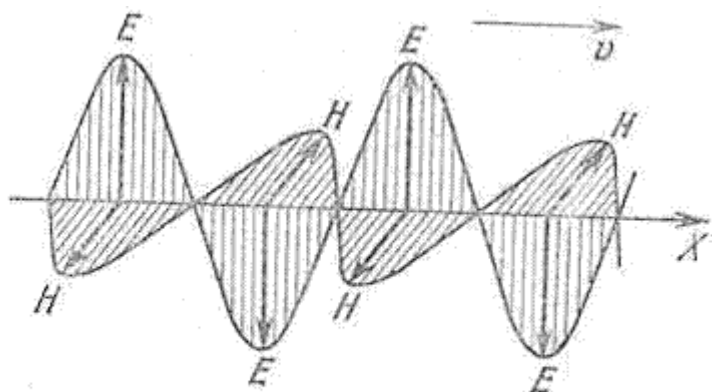
$$\vec{E} = \vec{E}_A \cos(\omega t - kz) \quad \vec{H} = \vec{H}_A \cos(\omega t - kz)$$

Где $\vec{E}_A, \vec{H}_A$ - амплитудные значения напряженности электрического и магнитного поля, ω - круговая частота волны, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число, λ - длина волны

Из уравнений Максвелла $\Rightarrow$ электрическое и магнитное поля плоской волны связаны соотношением:

$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} [\vec{n} \times \vec{E}] = \sqrt{\mu \mu_0} \vec{H}$, $\vec{n}$ - единичный вектор, задающий направление распространения волны, эти три вектора образуют правую тройку векторов.

№69. Нарисуйте взаимную ориентацию полевых векторов и волнового вектора в плоской волне.



Волновой вектор – вектор, направленный в сторону распространения волны ($\vec{v}$), $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – полевые векторы, образуют правую тройку векторов.

№70. Чему равны плотность потока энергии электромагнитной волны.

Плотностью потока энергии называют электромагнитную энергию, переносимую волной за единицу времени через поверхность единичной площади, перпендикулярную к направлению распространения волны:

Объемная плотность энергии, переносимой волной равна $\omega = \varepsilon \varepsilon_0 E^2$

Плотность потока энергии: $\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}] = \omega c \vec{n}$ или $S = \frac{\Delta W}{s \Delta t} = \omega c$

№71. Обоснуйте возможность введения скалярного и векторного потенциалов нестационарного электромагнитного поля.

$$(1) \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$(2) \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(3) \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$(4) \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Посмотрим на уравнение (3), заметим, что оно тождественно удовлетворяется, если положить $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}, t)$, A - вспомогательное поле называют векторным потенциалом электромагнитного поля

Подставим это выражение в (2), поменяем операцию ротора и производной по времени местами, перенесем все в левую часть и воспользуемся линейностью ротора, получим:

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Полученное соотношение представляет собой локальное условие потенциальности суммарного векторного поля

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Это приводит к соотношению:

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi, \varphi(\vec{r}, t) - \text{скалярный потенциал электромагнитного поля}$$

№72. Запишите уравнение калибровки Лоренца.

Калибровка векторного потенциала - наложение дополнительных условий, позволяющих однозначно вычислить векторный потенциал электромагнитного поля для решения тех или иных задач.

Калибровка Лоренца - выбор векторного потенциала электромагнитного поля в виде $\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, где φ - электростатический потенциал.

Эта калибровка применяется для рассмотрения динамических задач. Калибровка Лоренца сохраняется при преобразованиях Лоренца.

№73. Запишите уравнения для векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля.

$$\Delta \vec{A} - \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = - \mu \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$\Delta \varphi - \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

№74. Какой вид имеют решения уравнений для векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0} \oint \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

№75. Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля электронеutralной системы движущихся зарядов на больших расстояниях от нее.

№76. Запишите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых электронеutralной системой движущихся зарядов на больших расстояниях от нее.

№77. Запишите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых электронеutralной системой движущихся зарядов, дипольный момент которой меняется по гармоническому закону, на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от нее.

№78. Чему равна средняя мощность, излучаемая электронейтральной системой движущихся зарядов, дипольный момент которой меняется по гармоническому закону, на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от нее.

№79. Дайте определение квазистационарных электромагнитных процессов.

Квазистационарный процесс - процесс, протекающий в ограниченной системе так быстро, что за время распространения этого процесса в пределах системы ее состояние не успевает измениться.

Поэтому при рассмотрении процесса можно пренебречь временем его распространения в пределах системы.

К квазистационарным электромагнитным процессам относятся процессы, в которых можно пренебречь токами смещения.

№80. Приведите примеры расчёта тока в электрических цепях при переходных процессах (RC - и RL -цепи).

1) RC -цепь

$$I(0) = 0$$

$$U_C = \frac{q}{C} - \text{падение напряжения на конденсаторе}$$

$$U_R = IR - \text{падение напряжения на резисторе}$$

$$\varepsilon = \frac{q}{C} + IR - \text{правило Кирхгофа}$$

$$I = \frac{dq}{dt}, \text{ решаем диффур:}$$

$$q = \varepsilon C - \varepsilon C e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow I = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

2) RL -цепь

$$I(0) = 0$$

$$\varepsilon = IR + L \frac{dI}{dt} \Rightarrow I = -\frac{L}{R} \frac{dI}{dt}, \text{ опять решаем диффур:}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} + C e^{-\frac{Rt}{L}}$$

№81. Собственные колебания в колебательном контуре. Амплитуда и начальная фаза при гармонических колебаниях.

Колебательный контур - электрическая цепь, содержащая соединенные катушку индуктивности и конденсатор. В такой цепи могут возбуждаться колебания тока.

$$\text{Пусть конденсатор заряжен до напряжения } U_0, \text{ тогда энергия в конденсаторе: } E_C = \frac{CU_0^2}{2}$$

При соединении конденсатора с катушкой из-за разности потенциалов на обкладках конденсатора в цепи потечет ток I , что вызовет в катушке ЭДС самоиндукции, направленной на уменьшение тока. Ток, вызванный ЭДС в начальный момент времени будет равен току разряда конденсатора, то есть результирующий ток = 0. В этот момент энергия

$$\text{катушки: } E_L = 0. \text{ Затем ток будет возрастать а конденсатор разряжаться. В итоге: } E_C = 0; \quad E_L = \frac{LI_0^2}{2}$$

После этого начнется перезарядка конденсатора итд. Напряжение, возникающее в катушке при изменении

$$\text{протекающего тока равно: } U_L = -L \frac{dI}{dt}, \text{ ток, вызванный изменением напряжения на конденсаторе: } I_C = C \frac{dU_C}{dt}$$

$U_L = U_C$; $I_L = I_C$, так как напряжение возникает на катушке в следствие его падения на конденсаторе, а ток, вызванный конденсатором, проходит через катушку. Одно из уравнений дифференцируем и подставляем во второе:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{LC} = 0 - \text{уравнение свободных колебаний в контуре. Решение:}$$

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \text{циклическая частота, } I_0 - \text{амплитуда колебаний, } \varphi - \text{начальная фаза}$$

№82. Уравнение затухающих колебаний и его решение. Время затухания.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega^2 x = 0 \text{ - дифференциальное уравнение затухающих колебаний}$$

Из курса матана - общее решение: $s = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$, где $C_{1,2}$ - постоянные коэффициенты, зависящие от начальных условий; $\lambda_{1,2}$ - корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$

$$\text{Если } \beta < \omega_0, \text{ то корни: } \lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm i\omega', \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\text{Общее решение: } s = e^{-\beta t}(C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}) = e^{-\beta t}[(C_1 + C_2)\cos \omega' t + i(C_1 - C_2)\sin \omega' t]$$

Вводя вместо $C_{1,2}$ новые постоянные A_0 и φ_0 , связанные соотношениями: $C_1 + C_2 = A_0 \sin \varphi_0$, а $i(C_1 - C_2) = A_0 \cos \varphi_0$, окончательно: $s = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega' t + \varphi_0)$ или $s = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \phi_0)$

Постоянные величины A_0 φ_0 ϕ_0 зависят от начальных условий, т.е. от значения s и $\frac{ds}{dt}$ в начальный момент времени

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ - период затухающих колебаний}$$

№83. Вынужденные колебания в колебательном контуре под действием гармонической силы.

Вынужденные колебания возникают в RLC контуре при добавлении в него ЭДС, изменяющемуся по закону синуса или косинуса. В таком контуре со временем установятся вынужденные колебания с частотой генератора. Подвод энергии от генератора будет в точности компенсировать потерю энергии на сопротивлении.

По 2-му правилу Кирхгофа:

$$-U_L + U_R + U_C = \varepsilon_B$$

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos \omega t \text{ - уравнение вынужденных колебаний}$$

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

№84. Формулы для амплитуды и фазы.

$$\text{Амплитуда: } q_0 = \frac{\varepsilon_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad U = \frac{q}{C} = \frac{\varepsilon_0 \cos(\omega t + \varphi)}{LC \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$\text{Фаза: } tg \varphi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\text{Закон изменения тока: } I = \frac{dq}{dt} = \frac{\omega \varepsilon_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi)}{LC \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2 \omega^2}}$$

№85. Резонанс токов.

Резонанс токов - резонанс, происходящий в параллельном колебательном контуре, при его подключении к источнику напряжения, частота которого совпадает с резонансной частотой контура.

Резонансная частота контура: $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

В результате резонанса токов, общий ток в цепи может быть относительно мал, а в контуре индуктивности и емкости, где происходят электрические колебания, протекает переменный ток, значительно больший общего.

На резонансной частоте, токи, текущие в реактивных элементах, превышают общий ток в $\frac{R}{\rho}$ раз, $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$

№86. Опишите и обоснуйте метод комплексных амплитуд (описание, обоснование, пример).

Комплексная величина, модуль и аргумент которой равны соответственно амплитуде и начальной фазе колебаний, называется комплексной амплитудой.

Т.к. над выражениями вида $a(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ неудобно производить арифметические операции, их можно представить в виде: $a(t) = \operatorname{Re}(A e^{i(\omega t + \varphi)}) = \operatorname{Re}(A e^{i\varphi} e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}(\hat{A} e^{i\omega t})$, где $\hat{A} = A e^{i\varphi}$ - комплексная амплитуда

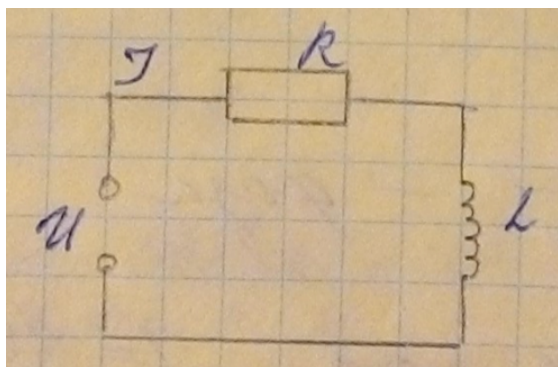
Таким образом вводятся комплексные амплитуды ЭДС источника ($\hat{\mathcal{E}}$) и искомых токов ($\hat{I}_K$)

Пользуясь обычными правилами Кирхгофа, можно составить систему уравнений для комплексных амплитуд:

$$\hat{U}_R = \hat{I} R \quad \hat{U}_C = \frac{\hat{I}}{i\omega C} \quad \hat{U}_L = \hat{I} \cdot i\omega L$$

Или $\hat{U} = \hat{I} z$, где $z_R = R$ $z_C = \frac{1}{i\omega C}$ $z_L = i\omega L$; z - комплексное сопротивление (импеданс) соответствующего элемента. Уравнения составляются точно также как и для цепей постоянного тока

Пример:



$$z_{RL} = z_R + z_L = R + i\omega L$$

$$\hat{U} = \hat{I} z_{RL} = \hat{I}(R + i\omega L) \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}}{R + i\omega L} = \frac{U e^{i\varphi_u}}{R + i\omega L}$$

$$I = |\hat{I}| = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\varphi_I = \varphi_u - \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right), \text{ т.к. } R + i\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{\arctg(\frac{\omega L}{R})}$$

№87. Что такое эффективные значения силы тока и напряжения. Запишите формулу для мощности переменного тока.

Эффективный ток (напряжение) - это величина постоянного тока (напряжения), действие которого произведет такую же работу, что и рассматриваемый переменный ток (напряжение) за время одного периода.

Мощность переменного тока:

Пусть $U = U_0 \cos \omega t$, $I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$ ($U(0) = 0$, $I(0) = -I_0 \sin \varphi$)

Энергия, выделяемая за время Δt :

$$\Delta W = U_0 I_0 \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) \Delta t \Rightarrow W = \sum \frac{I_0 U_0}{2} \cos \varphi \Delta t - \sum \frac{I_0 U_0}{2} \cos(2\omega t - \varphi) \Delta t = \frac{I_0 U_0}{2} \cos \varphi$$

В последней сумме суммирование по периоду дает 0, т.к. половину периода косинус имеет положительные значения, а половину - отрицательные

$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{2} U_{eff} I_{eff} \Rightarrow U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

№88. В чем заключается скин-эффект. Чему равна толщина скин-слоя в простейших случаях.

Скин-эффект - эффект уменьшения амплитуды электромагнитных волн при их проникновении вглубь проводящей среды. В результате этого эффекта, переменный ток высокой частоты при протекании по проводнику, распределяется не равномерно по сечению, а преимущественно в поверхностном слое.

Толщина скин-слоя - глубина, на которой объемная плотность тока становится в e раз меньше, чем на поверхности

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\lambda \mu \omega}}, \lambda - \text{удельная проводимость}, \mu - \text{магнитная проницаемость}, \omega - \text{частота}$$

№89. Сформулируйте и запишите закон сохранения импульса для частиц в электромагнитном поле.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \oint_V \vec{g} dV, \quad \vec{g} = [\vec{D} \times \vec{B}] - \text{плотность импульса электромагнитного поля}$$

№90. Функция Лагранжа движущейся в электромагнитном поле заряженной частицы.

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + L' = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \vec{v} \vec{A} - e\varphi, \text{ где } \varphi, \vec{A} - \text{скаляр и вектор, зависящие от положения частицы в пространстве.}$$

№91. Функция Гамильтона движущейся в электромагнитном поле заряженной частицы.

$$H = \vec{v} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi = c \sqrt{m_0^2 c^2 + (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2}$$

№92. Система уравнений Максвелла и преобразования Галилея.

Преобразования Галилея: если инерциальная система отсчета (ИСО) S' движется относительно ИСО S с постоянной скоростью $\vec{v}$ вдоль оси x , начала координат совпадают в начальный момент времени в обеих системах, то:

$$x' = x + vt,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = t$$

Уравнения Максвелла не инвариантны относительно преобразований Галилея (т.к. волны распространяются со скоростью света, которая постоянна во всех СО)

№93. Постулаты теории относительности. Эксперимент Майкельсона-Морли.

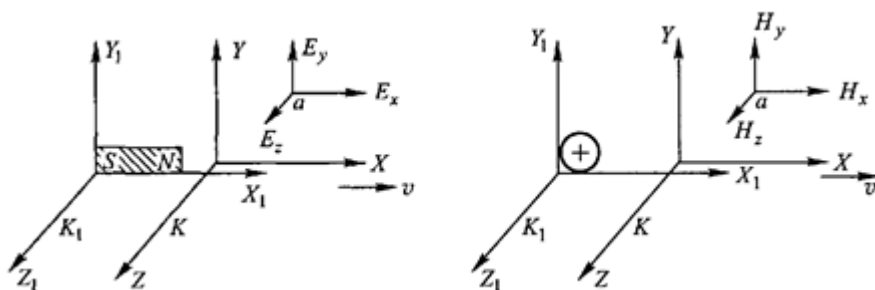
Постулаты СТО

В первую очередь в СТО, как и в классической механике, предполагается, что пространство и время однородны, а пространство также изотропно. Если быть более точным (современный подход) инерциальные системы отсчета собственно и определяются как такие системы отсчета, в которых пространство однородно и изотропно, а время однородно. По сути существование таких систем отсчета постулируется.

Постулат 1 (принцип относительности Эйнштейна). Любое физическое явление протекает одинаково во всех инерциальных системах отсчёта. Это означает, что форма зависимости физических законов от пространственно-временных координат должна быть одинаковой во всех ИСО, то есть законы инвариантны относительно переходов между ИСО. Принцип относительности устанавливает равноправие всех ИСО.

Постулат 2 (принцип постоянства скорости света). Скорость света в «покоящейся» системе отсчёта не зависит от скорости источника. Поскольку источник имеет разные скорости в разных ИСО, то это означает, что *скорость света одинакова во всех инерциальных системах.*

№94. Преобразования Лоренца.



Пусть имеются две системы отсчета K и K_1 , причем K движется относительно K_1 с постоянной скоростью $\vec{v}$ параллельно оси x . При этом в системе K существует электрическое поле с напряжённостью $\vec{E}$ и магнитное поле с напряжённостью $\vec{H}$, а в системе K_1 - электрическое поле с напряжённостью $\vec{E}_1$ и индукцией $\vec{D}_1$ и магнитное поле с напряжённостью $\vec{H}_1$ и индукцией $\vec{B}_1$. Тогда формулы преобразования электромагнитных полей имеют вид

$$E'_x = E_x$$

$$B'_x = B_x$$

$$E'_y = \frac{E_y - v_0 B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$B'_y = \frac{B_y - v_0 \frac{E_z}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$E'_z = \frac{E_z - v_0 B_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$B'_z = \frac{B_z - v_0 \frac{E_y}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$